



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Segundo semestre de 2024

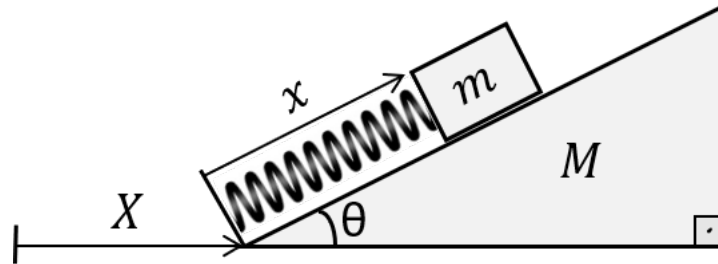
Mecânica Clássica

08/08/2024 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1: FORMALISMO LAGRANGEANO

Considere uma massa m que pode se mover sem atrito sobre um plano inclinado com ângulo θ em relação à horizontal. O plano inclinado, com massa M , pode se mover horizontalmente sem atrito. A massa m está conectada a uma mola com constante elástica k e comprimento natural L_0 , que está fixa na parte inferior do plano inclinado.



- (a) (30%) Escreva a Lagrangeana do sistema usando como coordenadas generalizadas a posição da massa m ao longo do plano inclinado (x) e a posição da massa M ao longo do plano horizontal (X).
 - (b) (10%) Use a equação de Euler-Lagrange para encontrar as equações de movimento das massas m e M .
 - (c) (20%) Determine as posições de equilíbrio estático da massa m (x_{eq}) e da massa M (X_{eq}).
 - (d) (40%) Calcule a frequência característica do sistema, i.e., a frequência do modo normal de vibração em torno das posições de equilíbrio de cada massa. Discuta brevemente o limite em que $M \gg m$. Dica: Utilize uma solução do tipo $x(t) = x_{eq} + \eta(t)$ e $X(t) = X_{eq} + \zeta(t)$.
-

QUESTÃO 2: POTENCIAL CENTRAL E PEQUENAS OSCILAÇÕES

Uma força sobre um planeta dada por

$$F = -Cmr$$

é proveniente de uma distribuição uniforme de poeira no sistema solar. Aqui, m é a massa do planeta, C é uma constante proporcional à densidade da poeira, e r é a distância do Sol até o planeta. Seja G a constante gravitacional e M a massa do Sol.

- (a) (20%) Mostre que o momento angular \vec{L} se conserva e que a energia mecânica é dada por

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{Cmr^2}{2} - \frac{GMm}{r},$$

onde $L = |\vec{L}|$.

- (b) (40%) Calcule o período para uma órbita circular de raio r_0 do planeta. Escreva sua resposta em termos de r_0 , C , G , M e m .
- (c) (40%) Calcule o período das oscilações radiais para pequenas perturbações em torno da órbita circular de raio r_0 . Escreva sua resposta em termos de r_0 , C , G , M e m .
-

QUESTÃO 3: TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Considere a seguinte transformação das variáveis (q, p) para as variáveis (Q, P) :

$$Q = p + iaq, \quad P = \frac{p - iaq}{2ia},$$

onde a é uma constante e i é a unidade imaginária.

- (a) (20%) Esta transformação é canônica? Justifique sua resposta quantitativamente e em detalhe.
- (b) (40%) Encontre a função geradora do primeiro tipo (ou seja, uma função das coordenadas q e Q) $F = F(q, Q)$ para a transformação em questão.
- (c) (10%) Sabendo que o Hamiltoniano no sistema (q, p) é dado por

$$H = \frac{p^2 + a^2 q^2}{2},$$

calcule o Hamiltoniano transformado $K = K(Q, P)$.

- (d) (30%) Usando o resultado do item (c), escreva as equações de Hamilton para as coordenadas transformadas (Q, P) e obtenha as soluções para $Q(t)$ e $P(t)$, sabendo que em $t = 0$, $Q(0) = Q_0$ e $P(0) = P_0$.
-

QUESTÃO 4: FORMALISMO DE HAMILTON-JACOBI

Um sistema de um grau de liberdade é descrito pelo Hamiltoniano

$$H = qp.$$

- (a) (15%) Escreva a equação de Hamilton-Jacobi para este sistema. Expresse seu resultado em termos da função geradora S (função principal de Hamilton).
 - (b) (30%) Usando o resultado do item (a) e aplicando um método de separação de variáveis, calcule a função geradora $S = S(q, \alpha, t)$ explicitamente, onde α denota o momento transformado P .
 - (c) (55%) Utilizando a função $S = S(q, \alpha, t)$ obtida no item (b), calcule as expressões para $q = q(t)$ e $p = p(t)$. Expresse seus resultados em termos de α e β , onde β representa a coordenada transformada Q .
-